

Fraktale Geometrie der Hanffasern

Rainer Nowotny

1. Vorbetrachtung

Als bekannt wird der Aufbau des Bastes, aus seinem Wuchs im Pflanzenstängel resultierend, in die Bastkategorien Elementarfaser, Faserbündel, Faserkollektiv eingeteilt, vorausgesetzt.

Bekannt sei auch der Aufbau der Elementarfaser aus Fibrillen.

Weiterhin seien Gemeinsamkeiten und Unterschiede von Langfaser- und Kurzfaseraufbereitung vertraut.

In der Abhandlung seien die Module Brecher und Schwinge in beiden Technologien auf eine Stufe gestellt.

Weiterhin wird dem Hecheln der Langfaseraufbereitung das Kardieren, Öffnen oder Aufschließen der Kurzfaseraufbereitung gleichgestellt und als bekannt voran gesetzt.

Unter einer Fibrillierung von Bastfasern ist zu verstehen:

1. Eine Auffaserung des Faserbündels, bei der einzelne Elementarfaser an wenigstens einer Stelle die Haftung mit dem Faserbündel, meist durch einen Faserriss verursacht, aufgeben, ohne jedoch das Faserbündel gänzlich zu verlassen
2. Ein Herauslösen von Fibrillen an aufgerissenen Elementarfaser.

Zwischen diesen Möglichkeiten wird im weiteren nicht unterschieden (Bild 1).

Eine solche Fibrillierung wird insbesondere dann erzielt, wenn eine mechanisch starke Bearbeitung an einer Sollbruchstelle das Reißen oder Aufreißen der Elementarfaser verursacht. Reißen alle Elementarfaser eines Bündels in unmittelbarer Nähe auseinander, bewirkt dieses eine Einkürzung. Für ein Herauslösen von Fibrillen gilt äquivalentes.

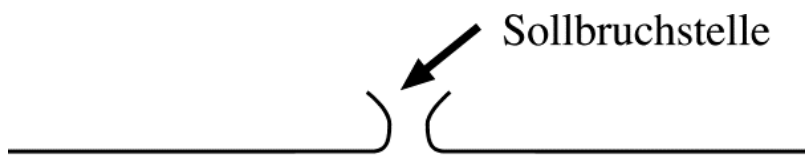


Bild 1: Modell des Auffaserns durch aggressive Bearbeitung

Folgerung: Soll eine Fibrillierung des Bastes erreicht werden, sollte ein Einkürzen nur auf dem Wege des Reißens, nicht aber durch Schneiden erfolgen.

Bemerkung:

Traditionell wurde Hanf für besonders stark zu beanspruchende Werkstoffe verwandt:

Taue, Seile, Militärtexilien, Segeltuche etc. Dabei trat zu Tage, dass nach einiger Beanspruchung die Widerstandsfähigkeit der textilen Verbindung wuchs: Resultat einer "nachträglichen" Fibrillierung des Langfaserbastes unter großer Beanspruchung im Einsatz.

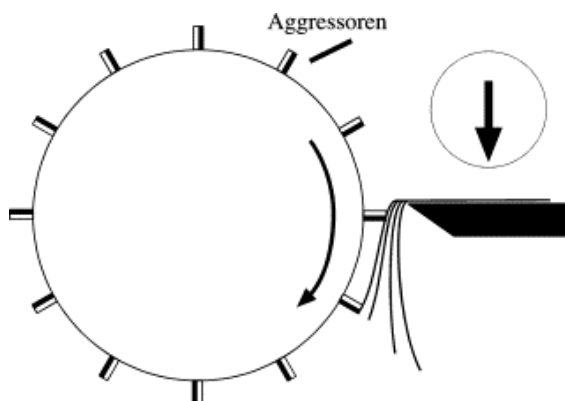


Bild 2: Schwinge mit Depressor und Aggressoren

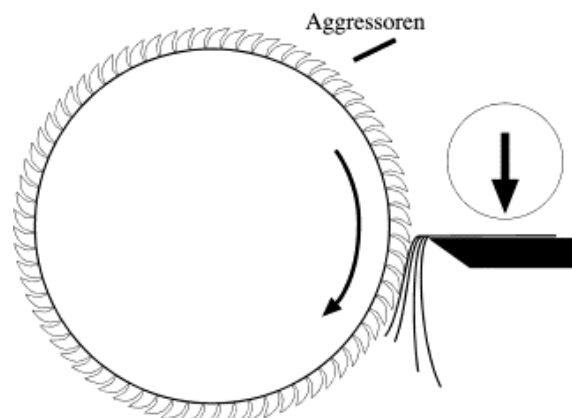


Bild 3: Öffner mit Depressor und Aggressoren

Diese Bastfibrillierung unter Verzicht der Länge wird in einer Wirrfaseraufbereitung bereits im Faserrohmaterial sichergestellt, wobei die Wirrfaserschwingmodule (Bild 2) und die Wirrfaseröffnung (Bild 3) jeweils funktionelle

Einheiten von Schabenausreinigung, Einkürzen an Sollbruchstellen und Fibrillieren des Bastes darstellen. Infolgedessen zerfasert der Bast äquivalent zur Entholzung und zur Einkürzung ehemals langer Fasern, wobei eine Verfeinerung des Bastes einher geht, welche jedoch für diesen Ansatz vernachlässigt werden soll.

2. Geometrisches Modell einer fibrillierten Bastfaser

Ausgehend vom erreichbaren Ziel einer idealen Aufbereitung, unter der wir eine hinreichende Verarbeitungskette verstehen wollen, die das Bastfasermaterial ungleichmäßig, aber stark derart bearbeitet, dass (gedacht) alle Bastfaserbündel ungleichmäßig und hinreichend fibrilliert sind, d.h. es existiere keine ausgezeichnete Bündelstelle und keine unfibrillierte Faserstelle eines Einzelbastes, soll nunmehr ein geometrisches Modell hierfür entwickelt werden.

Die Einkürzung des Stapels kann für die Modellierung vernachlässigt werden, wenn folgende Iteration I_t beschrieben wird:

- (i) Ein Faserkollektiv Φ von m Faserbündel je n Elementarfaseren mit $n \cdot m \rightarrow \infty$ sei gegeben.
- (ii) Sei l die Länge von Φ , so wird auf $l' = \text{rnd}(0, l)$, wobei $\text{rnd}(a, b)$ aus einer gegebenen reellen Zufallsverteilung auf dem offenen Intervall (a, b) in einem Iterationsschritt gemäß der Verteilung eine zufällige Variable erwählt, eine Sollbruchstelle einer Elementarfaser $m' = \text{rnd}(1, m)$ aus $n' = \text{rnd}(1, n)$ definiert, so dass die Elementarfaser $m' \times n'$ an der Stelle l' auf einem Faserbereich $r \in (0, l)$ zerfasert.
- (iii) Zerfasert eine Elementarfaser an $l' \approx 0$ oder $l' \approx l$, so wird der Faserrest der Restlänge $< r/2$ entfernt.

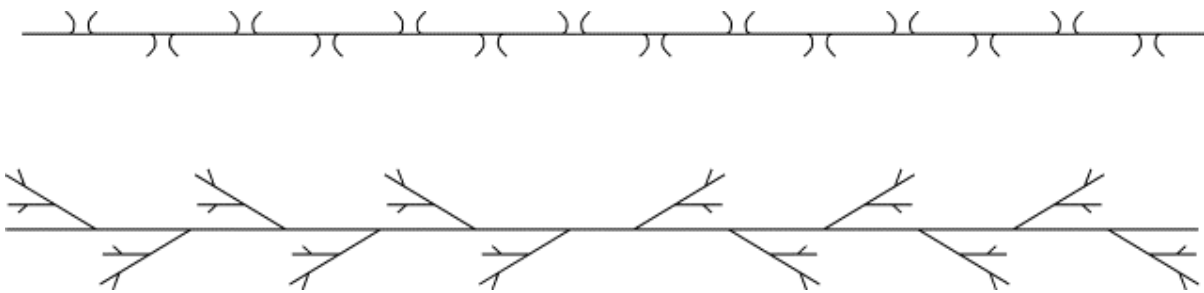


Bild 4: Iterativ erzeugte Hanffaser für $r \rightarrow 0$ und $r \gg 0$.

Offensichtlich muss für $r \rightarrow 0$ selbst bei Iterationen $\gg m \cdot n$ der Bast nicht notwendig eingekürzt werden, da die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens oder der unmittelbaren Nachbarschaft mehrerer Sollbruchstellen von Elementarfaseren gegen Null geht, vorausgesetzt $r \rightarrow 0$, welches jedoch in der Praxis insbesondere bei Rösthanf nicht unbedingt erreicht wird.

Im Resultat entsteht ein zerfasertes Bast mit $k \leq 2j$ Zerfaserungen, wenn j die Iterationszahl ist: $F = I^j(\Phi)$

Dieses Modell geometrisch zu beschreiben, gehen wir gemäß [2] von einer Überdeckung der Faser F aus:

$$H_\delta^s(F) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s ; \{U_i\} \text{ ist eine } \delta\text{-Überdeckung von } F \right\}$$

ist Hausdorffmaß, wobei eine Überdeckung $\{U_i ; i \in I^\delta\}$, I^δ ist Indexmenge der δ -Überdeckung von F , dann erfüllt ist, wenn $\forall x \in F \exists i \in I^\delta$ mit $x \in U_i$. $\{U_i\}$ ist eine δ -Überdeckung, wenn $\forall i \in I^\delta : \forall x, y \in U_i : \|y - x\| \leq \delta$.

Nach Hausdorff [2] existiert nun für.

$$H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(F)$$

ein $D \in \mathbb{R}$ mit

$$H^s(F) = \begin{cases} \infty & \text{falls } s < D \\ 0 & \text{falls } s > D \end{cases}$$

D heißt Hausdorffdimension von F :

$$\dim_H F = \inf \{ s : H^s(F) = 0 \} = \sup \{ s : H^s(F) = \infty \}$$

Für den Fall, dass $\dim_H F \notin \mathbb{N}$ wird nach Mandelbrot F als fraktales Gebilde oder Fraktal bezeichnet (vgl. [5]).

Theorem:

Die oben iterativ erzeugte „fibrillierte Hanffaser“ ist ein Fraktal.

Es genügt zu zeigen, dass $\dim_{\text{H}} F > 1$, setzt man die Plausibilität $\dim_{\text{H}} F < 2$ und die Annahme, dass der Faserquerschnitt zu vernachlässigen sei, vorweg.

Gebilde wie Cantor-Staub, Sierpinski-Dreiecke o.ä. werden z.B. mit einer quadratischen Überdeckung der Seitenlänge d einer Anzahl N untersucht, wobei

$$\dim_{\text{H}} F = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\ln N(d)}{\ln 1/d}$$

Für Küstenstreifen existiert das berühmte Beispiel von Richardson, wonach

$$H_{\delta}(F) = \alpha \delta^{(1 - \dim_{\text{H}} F)}$$

Bei der Untersuchung einer fibrillierten Hanffaser, im weiteren kurz Faser genannt, soll ein Umweg begangen werden. Ziel soll es sein, Aussagen über die Hausdorffdimension zu erhalten, ohne diese direkt zu ermitteln.

Der hausdorffsche Ansatz wird verlassen, und betrachtet wird eine stetige Faser, nach der Iteration I_t partiell zwei- und dreidimensional zerfasert.

Sei $\{U_i\}$ eine δ -Überdeckung von F mit $|U_i| \leq \delta$ (abgeschlossene Überdeckungsmengen).

Offenbar ist: $\forall i \in I^{\delta} : \exists F_i$ mit $F_i = F \cap U_i$

Vermutet wird, dass F_i zu F ähnlich ist, und damit Aussagen über F_i gleichfalls fern liegen.

So beschränkt sich die Vorgehensweise auf die Schnittpunkte der Faser mit den Rändern der Überdeckungen, sofern von abgeschlossenen Überdeckungsmengen ausgegangen wird:

$\forall i \in I^{\delta} : \exists R_i$ Rand von U_i wobei gilt:

- (i) $R_i \subseteq U_i$
- (ii) $\forall x \in U_i / R_i \ \& \ \forall y \in R_i : \|y - x\| < \delta$
- (iii) $\forall x \in R_i : \exists y \in R_i : \|y - x\| = \delta$

Ferner sei $S_i = F \cap R_i = F_i \cap R_i$ (Menge der Schnittpunkte der Faser mit dem Rand eines Überdeckungselementes).

Offenbar kann $S_i = \emptyset$ oder $\|S_i\| \geq 1$ sein. Wenn jedoch F eine stetige Menge und die Überdeckung echt ist: $\forall U_i (i \in I^{\delta}) : \exists x \in U_i$ mit $x \in F$, so gilt $S_i \neq \emptyset$.

Von Interesse ist es im weiteren, welchen Einfluss die partiellen zwei- und dreidimensionalen Zerfaserungen haben.

Es sei:

- $d^i = \begin{cases} 1, & \|S_i\| \leq 2 \\ 2, & \|S_i\| > 3 \ \& \ S_i \text{ ist Teil einer Ebene} \\ 3, & \|S_i\| > 3 \ \& \ S_i \text{ ist nicht Teil einer Ebene} \end{cases}$

Demnach existieren für eine Überdeckung $\{U_i\}$ drei Mengen

- $D_1 = \{i, i \in I^{\delta} \ \& \ d^i = 1\},$
- $D_2 = \{i, i \in I^{\delta} \ \& \ d^i = 2\},$
- $D_3 = \{i, i \in I^{\delta} \ \& \ d^i = 3\}.$

So sei $d \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ derart, dass $d = (d_1, d_2, d_3)$ mit $d_1 = \|D_1\|,$
 $d_2 = \|D_2\|, d_3 = \|D_3\|.$

Für jede Überdeckung $\{U_i\}$ von F existiert ein derartiges $d(F)$, wobei $d_1 + d_2 + d_3 = \|I^{\delta}\|.$

Es sei eine Folge (δ_j) mit $\delta_j \rightarrow 0$ und (δ_j) ist streng monoton, beliebig aber fest gegeben.

Für jedes $j \in \mathbb{N}$ existiert eine δ_j -Überdeckung $\{U_i^j\}$ von F.

So beschreibt jedes $j \in \mathbb{N}$ ein Tripel $d^j = (d_1^j, d_2^j, d_3^j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ der oben beschriebenen Art.

Die Zahlenfolge (δ_j) beschreibt nun wohldefiniert eine Folge von δ_j - Überdeckung $\{U_i^j\}$ von F und gleichsam eine Folge (d^j) .

Offenbar gilt für eine nicht verschwindende, stetige Faser:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (d_1^j + d_2^j + d_3^j) = \infty .$$

Wie man leicht sieht, gelten nachfolgende Zusammenhänge:

Lemma 1:

Für die Zerfaserung $It^j(\Phi)$ einer stetigen Faser Φ , $\|\Phi\| = 1$, mit $k \rightarrow \infty$ gilt:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (d_2^j + d_3^j) = \infty .$$

Lemma 2:

Für eine stetige Faser $F = It^j(\Phi)$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} (d_2^j + d_3^j) = \infty$ gilt

$$\dim_{\mathbb{H}} F > 1.$$

Folglich gilt das Theorem.

Ist die Hausdorffdimension von F größer 1, so ist die Faser nach Mandelbrot ein Fraktal.

Im Einzelfall ist also die Voraussetzung der Behauptung für reelle Hanffasern zu prüfen, wobei es nicht schwer fallen wird, einen Entscheidungsalgorithmus bei geeigneter optischer Apparatur zu wählen, der Urteile darüber erlaubt, inwieweit eine Fibrillierung der Hanffaser erfüllt ist.

Folgerung:

Eine Hanffaser, für die die Voraussetzung der Fibrillierung gemäß Iteration It erfüllt ist, ist ein Fraktal der Hausdorffdimension $\dim_{\mathbb{H}} F > 1$.

3. Ansatz zur Beschreibung physikalischer Phänomene fibrillierter Bastfasern

3.1 Grenzen des Tensorkalküls für fraktale geometrische Gebilde

Am Beispiel der Behandlung der Elastizität fester Körper mögen die weiteren Ausführungen den Bezug nehmen.

Gemäß den Ansätzen von Vlasow, Deuker, Treffs u.a. (vgl. [1] & [3]) verursacht eine angreifende Spannung auf der Oberfläche eines Volumenelementes eines starren Körpers eine Verschiebung der Körperpunkte. Die Ursache (Spannung auf der Oberfläche) und die Folge (Verzerrung des Körpers) bilden ein Wirkungsgleichgewicht.

Für ein Volumenelement dV eines festen (starren) Körpers wird die Verzerrung, wobei je nach Rechenansatz sich der Körper gegenüber der Raummetrik oder der Raum gegenüber dem ursprünglichen Körper verzerrt, zu den verursachenden Kraftgrößen an den Flächenelementen in ein Gleichgewicht gestellt.

Beschreiben v_i die Koordinaten des Verschiebungsvektors, dann hat der Verzerrungstensor die Komponenten

$$d_{ij} = \frac{1}{2} (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i).$$

Vorausgesetzt bleibt dabei, dass $\dim F = 3$ und vorausgesetzt bleibt auch das Nichtverschwinden der Volumenelemente, die einer Gauß-Einsteinkrümmung unterliegen. Der Fall $\dim F < 3$ und insbesondere $\dim F \notin \mathbb{N}$ widerspräche den Voraussetzungen des Ansatzes.

Generell gilt das Interesse dem Verhältnis des Spannungstensors der Komponenten t_{kl} gegenüber der Verzerrung:

$$t_{kl} = f(d_{ij}) \quad \text{bzw.}$$

$$t_{kl} = f(d^{ij})$$

Im reversiblen Fall musste postuliert werden, dass jede Verschiebungsarbeit der Körperpunkte notwendig eine Verzerrung induziert, somit den Aufbau einer inneren Spannung.

Bekannterweise wird die virtuelle Verschiebungsarbeit mit dem elastischen Potential gleichgesetzt:

$$\delta U \equiv \delta A_{\text{virtuell}} = \int_V t^{ij} \delta d_{ij} dV$$

Die Enthalpie verbleibt im elastischen Potential und einem Energieverzehr, der dann in Form von Wärme abfließt oder in Zerstörungsarbeit ergeht:

$$H = U + E^Z .$$

Bemerkung:

Hieraus ersichtlich ist es nicht zwingend, dass die Irreversibilität des Prozesses (Abfließen von Wärme ist nicht reversibel) verlangen muss, dass nach Wegnahme der Spannung die Deformation nicht vollständig zurückgeht. Plastizität / Unelastizität ist erst dann erfolgt, sofern aus dem elastischen Potential innerhalb des Prozesses Energie auf E^Z übertragen wird.

Für das Spannungs/Dehnungsverhältnis lässt sich das Hooksche Gesetz formulieren:

$$t_{kl} = E_{ij}^{kl} d^{ij} .$$

Entsprechend ist im hookschen Bereich (der Voraussetzung nach allgemein gültig für sehr kleine Deformationen starrer Körper) das elastische Potential nur eine Funktion der Verzerrung:

$$U = \int_V E_{ij}^{kl} d^{ij} d_{kl} dV$$

Unter genauerer Betrachtung der Voraussetzungen der Nutzung des Tensorkalküls für elastische Deformationen tritt es an den Tag, dass das Tensorkalkül in der o.a. Form an der Beschreibungscomplexität fraktaler Gebilde und deren widerspenstigen Haltungen gegenüber analytischen Lösungswegen scheitern möchte.

Verzerrungseigenschaften lassen sich in fraktalen Gebilden $\dim F < 3$ nicht durch Verzerrungen von Volumenelementen beschreiben. Zudem sind auch Spannungstensoren an Oberflächen definiert, die im Fall fibrillierter Hanffasern verschwinden.

3.2 Prinzip des Gleichgewichtes in einer virtuellen Zeit

Gegeben sei ein System S im Gleichgewicht. Eine Störung des Systems S (Änderung des Energie/Impuls-Tensors, Spannungsangriff o.ä.) bewirkt im allgemeinen eine Zustandsänderung in ein Ungleichgewicht. Die Erfahrung lehrt, dass eine Ursache (Störung) in einem festen Körper sofort und unmittelbar eine Wirkung oder Gegenaktion im System auslöst: Das System eines starren Körpers strebt nach unmittelbarem Gleichgewicht: $t \rightarrow 0$ (z.B. Spannungsangriff \rightarrow Deformation).

Anders verhält es sich in thermodynamischen Systemen vieler Teilchen, bei denen das Gleichgewichtsbestreben im allgemeinen für $t \rightarrow \infty$ angesetzt wird.

Bei der Untersuchung einer fraktalen Faser sei das Gleichgewichtsbestreben als ein dynamisches System formuliert: $dS/dt = f(S)$.

Ansatz: Ein dynamisches System strebt in einer virtuellen Zeit einem Gleichgewichtszustand entgegen.

Aus diesem Ansatz folgt die Notwendigkeit der Dissipation des Systems und der Existenz wenigstens eines Attraktorgebietes. Angenommen kann werden, dass jeder Punkt des Definitionsbereiches nach einer unendlichen (virtuellen) Zeit in ein Attraktorgebiet fällt.

Beruft man sich auf den virtuellen Charakter der betrachteten Zeit, so liegt es am Tag, die analytische Form $d/dt = f()$ bei ausschließlicher Interesse $t \rightarrow \infty$ über eine Iteration $S(n+1) = P(S(n))$ zu beschreiben. P darf dabei lediglich von $S(n)$ abhängen.

Benutzt wird i.w. die Schreibweise von [5], ausgehend von einem festen Syntax C über einer boolschen Algebra. Eine Programmumgebung wird durch eine Struktur S (Zustandsstruktur) freier Variabler definiert.

Verweise auf eine Unterstruktur von S der Struktur u werden mit $S.i$ angegeben; allgemein $S.i_1 \dots i_n$, $I_s = \{i_1, \dots, i_n\}$ heißt Indexmenge der Unterstrukturen von S.

Ist $S.i$ eine Unterstruktur der Struktur u und hat u eine Unterstruktur u.k, wird $S.i.k = u.k$ geschrieben. Für die Indexmengen der Unterstrukturen gilt äquivalentes.

Mit eckigen Klammern [] werden die Werte über den Definitionsbereichen der Strukturen angegeben.

Es sei eine Faser F und eine Überdeckung $U = \{U_i; i \in I^\delta, \delta > 0\}$ von F beliebig aber fest. Gemäß o.a. Ansatzes existiert für ein betrachtetes physikalisches Phänomen aus einem Ungleichgewicht heraus eine Iteration $P^{n+1}(S) = P(P^n(S))$, wonach das System S notwendig in ein Attraktorgebiet fällt, oder aber zerstört wird.

Über einer Überdeckung $U = \{ U_i; i \in I^\delta, \delta > 0 \}$ einer Faser F bei endlichem Index I^δ existiert die endliche Struktur S eines endlichen Ortgebietes Ω isomorph zu I^δ . Eine solche Überdeckung ermöglicht die Einteilung von Nachbarschaften von Überdeckungselementen, die im folgenden interessieren sollen.

Die Nachbarschaftsbeziehungen von $S[\Omega]$ bilden gemäß [6] Harmonien, so daß aufgrund der vorausgesetzten Stetigkeit von F und der daraus resultierenden Harmoniegruppe die Determination eines Ereignisses auf alle Ortsbereiche von $S[\Omega]$ folgt. Das heißt, es existiert ein Unterprogramm – endlich für $\| I^\delta \| < \infty$ –, welches für ein vorgegebenes i_0 die Determination für $S[\Omega]$ erfüllt.

Zwischen zwei benachbarten Ortsbereichen im Sinne der o.a. Harmonie, d.h. die den beiden Ortsbereichen zugehörigen Teilfasern sind benachbart oder überdecken sich, liegt ein inneres Spannungspotential T^{ij} der Dimension eines Energietensors.

$$S[i_0].T[k,l] = T_{kl}.$$

Offensichtlich ist das Wirkungsgleichgewicht der Elastizitätslehre dann erfüllt, wenn an allen Orten Ω Spannungspotentiale gleichen Betrages anliegen.

Ein solches Gleichgewicht kann eine Näherungsprozedur mithilfe einer ausgleichenden Verzerrung der lokalen Größen von $S[\Omega]$, also $S[\Omega].xyz$, erzeugt werden:

Die Verzerrung ist dann:

$$S[i_0].d[k,l] = d_{kl}, \text{ gemäß } d_{kl} = f(T^{ij}), \text{ oder im hookschen Fall } t_{kl} = E^{kl}_{ij} d^{ij}.$$

Folglich entstehen an allen Nachbarorten von i_0 Potentialungleichgewichte, welche in diesen Nachbarorten virtuelle Spannungen bzw. Spannungspotentiale induzieren. Diese werden auf analoge Weise durch Verzerrungen ausgeglichen.

ObdA seien die Faserteile der Überdeckungselemente von i_0-1 und i_0+1 Nachbarorte von i_0 :

$$\begin{aligned} S[i_0-1].T[k,l] &= {}^v T_{kl} \\ S[i_0+1].T[k,l] &= {}^v T^{kl}. \end{aligned}$$

Wieder verursachen die Spannungen in jedem Überdeckungselement eine Verzerrung der benachbarten Überdeckungen.

$$\begin{aligned} S[i_0-1].d[k,l] &+= {}^v d_{kl} \\ S[i_0+1].d[k,l] &+= {}^v d_{kl} \end{aligned}$$

Für endliche I^δ ist die Iteration abzählbar.

Offenbar beschreiben diese Formalismen eine Iteration derart, dass Spannungen immer wieder Verzerrungen verursachen, solange zwischen benachbarten Überdeckungen = benachbarten/überlagerten Teilfasern Ungleichheiten der Spannungspotentiale auftreten, verursachen diese wiederum Deformationen und folglich wiederum Spannungen zwischen benachbarten/überlagerten Teilfaser.

Sofern diese Iteration eine Attraktormenge $= \emptyset$ hat, also die Spannungs/Dehnungsverhältnisse keine stabilen oder quasistabilen Positionen einnehmen, muss das System als nicht mehr stabil bzw. zerstört anzusehen sein.

Für nichtverschwindende Attraktormengen jedoch liefert eine solche Iteration den Zustand eines stabilen Spannungs/Dehnungs-Verhältnisses.

Literatur

- [1] Beckert, Herbert: Nichtlineare Elastizitätstheorie, Leipzig 1984
- [2] Hausdorff, Felix: Mengenlehre, Berlin 1927
- [3] Herbert, Dieter: Die Entstehung des Tensorkalküls; Stuttgart 1991
- [4] Kortke & Nowotny: Semantische Ziele im C-Syntax der Beschreibung von MuSys 2; Seminarberichte der KNR-Production; Berlin 1992
- [5] Leven & Koch & Pompe: Chaos in dissipativen Systemen; Berlin 1989
- [6] Nowotny, Rainer: Die Geometrie einer diskreten Menge; Berlin 1988
- [7] Nowotny, Rainer: Einheimische Faserpflanzen; in: Praxis der Naturwissenschaften Chemie; Köln 1997